

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено:

В.о.завідувача кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Тема»

Виконала:

студентка IV курсу, групи КА-64
Довжаниця Катерина Григорівна

Керівник:

кандидат наук, доцент
Барановська Леся Валеріївна

Консультант з нормоконтролю:

доцент, к.т.н.
Коваленко А. Є.

Рецензент:

доцент, к.т.н.
Харченко К. В.

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент (-ка) _____

Київ – 2020 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о.завідувача кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студенту

Довжаниці Катерини Григорівни

1. Тема роботи «Метод розв’язуючих функцій в задачі зближення», керівник роботи Барановська Леся Валеріївна, кандидат наук, доцент, затверджені наказом по університету від «25» травня 2020 р. № 1143-с

2. Термін подання студентом роботи 08 травня 2020 року _____

3. Вихідні дані до роботи

4. Зміст роботи

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)

6. Консультанти розділів роботи*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	к.е.н., доцент Шевчук О.А.		
Нормоконтроль	доцент, к.т.н. Коваленко А.Є.		

7. Дата видачі завдання _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання	13.04.2020	Виконано
2	Ознайомлення з літературою	27.04.2020	Виконано
3	Написання теоретичної частини диплому	27.04.2020	Виконано
4	Аналіз методів для розв'язання поставленої задачі	04.05.2020	Виконано
5	Розробка та тестування програмного продукту	11.05.2020	Виконано
6	Виконання функціонально-вартісного аналізу	28.05.2020	Виконано
7	Отримання висновків після тестування	29.05.2020	Виконано
8	Оформлення дипломної роботи згідно ДСТУ	08.06.2020	Виконано
9	Отримання допуску до захисту, подача роботи до деканату	12.06.2020	Виконано

Студент

Катерина ДОВЖАНИЦЯ

Керівник

Леся БАРАНОВСЬКА

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: с., 5 рис., 6 табл., 2 дод., 21 джерел.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ ЗБЛИЖЕННЯ

Об'єкт дослідження – диференціальна гра переслідування

Мета роботи – побудувати керування за допомогою методу розв'язуючих функцій у диференціальній грі переслідування.

Методи дослідження – побудова алгоритмів керування.

Був досліджений метод розв'язуючих функцій в задачах зближення.

Для знаходження часу затримки втікача був розроблений програмний продукт.

Подальший розвиток предмету дослідження – розгляд задач групового переслідування, інших класів задач та знаходження оптимального керування для втікача.

ABSTRACT

Diploma work: p., 5 fig., 6 tables, 2 appendixes, 21 sources.

METHOD OF SOLVING FUNCTIONS IN APPROXIMATION PROBLEMS

The object of study is the differential game of persecution

The purpose of the work is to build control using the method of solving functions in the differential game of pursuit.

Research methods - construction of control algorithms.

The method of solving functions in convergence problems was investigated.

A software product was developed to find the time of the fugitive's delay.

Further development of the subject of research - consideration of the tasks of group pursuit, other classes of tasks and finding the optimal management for the fugitive.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	10
ВСТУП.....	11
РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ ТА ДОПОМІЖНІ МАТЕМАТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ.....	12
1.1 Поняття теорії ігор	12
1.2 Класифікація ігор	13
1.3 Поняття диференціальних ігор переслідування	14
1.4 Допоміжні математичні результати	17
1.4.1 Загальні поняття та означення	17
1.4.1 Елементи випуклого аналізу.....	21
1.4.2 Багатозначні відображення.....	24
Висновки до розділу 1	29
РОЗДІЛ 2 МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ	30
2.1 Класифікація процесів, означення стратегій, постановка задачі.	30
2.2 Основна схема метода	35
Висновки до розділу 2	42
РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА ТРАЄКТОРІЇ РУХУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ	43
3.1 Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна	43
3.2 Розв'язання задачі методом розв'язуючих функцій.....	46
3.3 Візуалізація диференціальної гри на площині	50
Висновки до розділу 3	52
РОЗДІЛ 4: ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	53
4.1 Постановка задачі проектування.....	53

4.2 Обґрунтування функцій та параметрів програмного продукту	53
4.3 Економічний аналіз варіантів розробки	59
4.4 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня.....	64
Висновки до розділу 4	65
ВИСНОВКИ	66
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	67
ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДО ДОПОВІДІ.....	69
ДОДАТОК Б ТЕКСТ ПРОГРАМИ.....	77

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ККП – конфліктно-керований процес

ПП – програмний продукт

ВСТУП

На сьогоднішній день теорія ігор стала революційним міждисциплінарним явищем, що поєднує в собі психологію, математику, філософію та широкий спектр інших наукових областей. Ця наука на стільки розгалужена, що охоплює майже всі аспекти сучасного життя. Від оптимальних стратегій маркетингової кампанії до ведення військових рішень, ідеальної тактики аукціону та стилів голосування теорія ігор забезпечує гіпотетичну основу з матеріальними наслідками. Оскільки в цих рішеннях беруть участь численні сторони, теорія ігор є основою для раціонального прийняття рішень.

Кожного дня ми зустрічаємося з протидією декількох суб'єктів, противники намагаються досягти однієї мети швидше або наздогнати один одного. Саме це і досліджують у розділі диференціальних ігор, головним об'єктом досліджень якого є конфліктно-керований процес.

Розглянуто локальну задачу зближення з фіксованим часом з циліндричною термінальною множиною. Для розв'язання цієї задачі використовуємо метод розв'язуючих функцій. Основною метою цього методу є знаходження достатніх умов на параметри процесу, що приведуть траєкторію на термінальну множину.

РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ ТА ДОПОМІЖНІ МАТЕМАТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1 Поняття теорії ігор

Існує багато різних визначень того, що таке є теорія ігор (game theory). Наприклад, таке: «Теорія ігор – це теорія раціональної поведінки людей з неспівпадаючими інтересами» [1]. Також часто використовується таке: «Теорія ігор – це наука про стратегічне мислення» [2]. Або «Теорія ігор – це теорія математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту» [3], «Теорія ігор – це розділ прикладної математики, який досліджує моделі прийняття рішень в умовах неспівпадіння інтересів сторін (гравців)» [4]. Чи, наприклад, для застосування в економічній сфері: «Суть теорії ігор полягає в тому, щоб допомогти економістам зрозуміти та передбачити те, що буде діятися в економічному інтер'єрі (економічному контексті)» [4]. Отже, теорія ігор сьогодні досягла широкого використання як потужний апарат для дослідження соціально-економічних процесів. Суть її полягає в тому, що вона використовується для досягнення узгодження інтересів сторін.

Сторони, які приймають участь у узгодженні своїх інтересів, зветься гравцями. Іноді застосовують також назву агенти: переважно в рамках теорії активних систем [4,5], яка досліджує процеси організації управління в організаційних системах («об'єднаннях людей, які спільно здійснюють певну програму чи мету та дають спираючись на певні процедури, регламенти та правила» [6]). Обстановкою гри зветься сукупність всіх об'єктів та суб'єктів, які впливають на дану гру. Це можуть бути інші гравці, керівні органи, природні явища тощо.

1.2 Класифікація ігор

Передовсім, розрізняють ігри двох гравців та багатьох гравців. Ігри двох гравців є найбільш повно дослідженою частиною теорії ігор. Однак найчастіше в практичному застосуванні зустрічаються ігри з багатьма гравцями.

В залежності від обмежень на суму виграшу розрізняють ігри із нульовою сумою та ігри із довільною сумою. Ігри із нульовою сумою часто називають антагоністичними іграми, бо цілі гравців тут прямо протилежні, а виграш одним гравцем певної суми означає програш іншим гравцем (сукупністю інших гравців) тієї ж самої суми [7].

Ігри поділяються на класи за рівнем інформованості гравців. Виділяють ігри із повною інформованістю гравців та ігри із неповною інформованістю гравців щодо різних параметрів гри [7]. Якщо у грі відсутні всі інші види невизначеності крім ігрової, то це означає, що ми маємо справу з грою з повною інформованістю.

За можливістю повторів ігри поділяють на одноразові, коли гравці ходять одночасно та на динамічні, ігри в яких гравці здійснюють свої ходи послідовно. Динамічні ігри, в яких динаміка описується диференціальними або різницевиими рівняннями, називаються диференціальними іграми [7].

З точки зору можливості спільних дій гравців розрізняють некооперативні та кооперативні ігри [7]. В некооперативних іграх гравцям заборонено домовлятися між собою, передавати один одному будь-яку інформацію заборонено. А для кооперативних ігор навпаки характерним є те, що гравці вибирають стратегію для гри спільно та об'єднуються в коаліції.

Враховуючи зовнішній контекст, ігри поділяють на унікальні (коли гра проводиться всього один раз), популяційні (де гравці користуються знанням щодо перебігу аналогічних ігор), та ігри, які повторюються серед тієї ж самої сукупності гравців (в цих іграх гравці можуть користуватися загрозами) [7].

Часто одну і ту ж задачу можна розглядати як гру різного типу. Тому основною задачею дослідника є перш за все обрати правильну форму гри, і лише після цього розробляти концепції її розв'язання.

1.3 Поняття диференціальних ігор переслідування

У наш час теорія конфліктно-керованих процесів є однією з математичних наук, що розвиваються досить активно. В даній теорії головним об'єктом дослідження є задачі керування динамічними процесами в умовах конфлікту, який передбачає наявність двох або більше сторін, здатних діяти на процес з протилежними або неспівпадаючими цілями, а також оптимізація функціональних властивостей процесу. Динамічні процеси можуть описуватися диференційними, інтегральними, різницевих, гібридних та іншими рівняннями. Конфліктно керовані процеси, що описуються диференційними рівняннями, називають диференційними іграми [8]. Цей термін було введено Р. Айзеком – одним з засновників теорії диференційних ігор.

Однією з перших робіт в цій області вважають роботу Г. Штейнгауза, яку було опубліковано у 1925 році, в якій автор вперше формулює задачу переслідування.

Становлення теорії диференціальних ігор відносять до 60-х років ХХ сторіччя та пов'язують з іменами таких радянських та іноземних математиків, як М. М. Красовський, Л. С. Понтрягін, Л. А. Петросян, Б.М. Пшеничний, Р. Айзекс, У. Флемінг. Значний вклад в розвиток теорії ігор внесли А.Азімов, В. В. Захаров, А. А. Мелікян, А. І. Субботін, А.О. Чикрій та багато інших.

Красовським М.М. та представниками його наукової школи [9-11] була створена теорія позиційних ігор, в основі яких лежить поняття стабільного мосту та правило екстремального прицілювання. Для широкого класу диференційних ігор була доведена теорема про альтернативу [12-13]. Розв'язок ігрової задачі

зводиться до послідовного вибору екстремальних керувань, що зберігають траєкторію ККП на стабільному мосту та приводяться траєкторію по ньому на термінальну множину.

Прийнята схема позиційних ігор описується наступним чином [12]. Нехай рух конфліктно-керованого вектору z описується системою вигляду

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1.1)$$

де $z \in R^n$;

f – непервна функція.

У просторі R^n задана непорожня цільова множина M . Сформульовані дві задачі про позиційних підхід (тобто управління по принципу зворотного зв'язку). Перша задача (вона стає перед першим гравцем) – задача про зближення з цільовою множиною M у межах заданих фазових обмежень V ; друга задача (вона стає перед другим гравцем) – задача про ухилення вектору від множини M . Сукупність цих (протилежних) задач є диференційною грою зближення-ухилення.

Центральним результатом теорії позиційних ігор – теорема про альтернативу – розкриває зв'язок між вищеописаними задачами. У даній теоремі стверджується, що у рамках прийнятої формалізації завжди розв'язною є одна і тільки одна з задач, за умови вибору відповідних класів стратегій гравців.

Таким чином, задачі зближення-ухилення є взаємовиключними та взаємодоповнюючими. Звідси слідує важливий висновок про принципіальну непокращуваність позиційного способу керування. Теорема про альтернативу дозволяє розглядати кожную з задач зближення або ухилення як критерій розв'язності протилежної задачі.

Велика увага в роботах даної школи приділяється питанням практичної реалізації процедур керування та численного розв'язку прикладних задач теорії диференціальних ігор [14].

Л. С. Понтрягін запропонував та розвинув ідею розглядати диференціальну гру з двох точок зору [15]. При такому підході один з гравців стає домінуючим, оскільки йому надається право будувати керування на основі певної інформаційної дискримінації супротивника.

Наведемо більш детальний опис формалізації диференціальних ігор, які було запропоновано Л.С. Понтрягіним [16]. Нехай рух диференційно керованого об'єкта описується системою (1.1). Л.С. Понтрягін наголошує: «Ми пов'язуємо з диференційною грою дві різні задачі.

1) Нашою ціллю є завершення гри, тобто приведення точки z на множину M . при цьому для здійснення цієї цілі в нашому розпорядженні знаходиться керуючий параметр u , так що в кожен момент часу t , так що в кожен момент часу t ми обираємо значення $u(t)$ цього параметра, використовуючи відомі $z(s)$ та $v(s)$ на проміжку $t - \tau < s < t$. Це правила переслідування.

2) Нашою ціллю є запобігання кінця гри, тобто запобігання потрапляння точки z на множину M . При цьому для досягнення цієї цілі в нашому розпорядженні знаходиться керуючий параметр v , так що в кожен момент часу t ми обираємо значення $v(t)$ цього параметра, використовуючи відомі $z(s)$ та $u(s)$ на проміжку $t - \tau < s < t$. Це правила ухилення.»

Основні результати щодо розв'язку диференціальних ігор переслідування та ухилення отримали Л.С. Понтрягін та Є.Ф. Міщенко. В роботі [17] сформульовані достатні умови розв'язності задачі переслідування в нелінійних диференціальних іграх. В ній використовується формалізм принципу максимуму – одного з центральних методів теорії керування. Головний результат полягає в описі початкових позицій, з яких гарантовано є можливість завершення переслідування, а також в обчисленні часу переслідування, та спосіб формування керування переслідувача, що реалізує процес переслідування.

Спрощення результатів роботи [17] привели до створення Л.С. Понтрягіним першого та другого методів розв'язку задачі переслідування для лінійних

диференційних ігор [15]. Найбільш простим та досить ефективним для розв'язку конкретних задач переслідування є перший метод Л.С.Понтрягіна. В рамках цього методу достатні умови розв'язності задачі переслідування в класі контрстратегій можна зручно перевірити. Перший метод Л.С.Понтрягіна тісно пов'язаний з методом розв'язуючих функцій, який більше детальніше буде розглянуто у наступному розділі.

1.4 Допоміжні математичні результати

1.4.1 Загальні поняття та означення

Нехай R^n – евклідов n -мірний простір точок $x = (x_1, \dots, x_n)$, в якому задані звичайні операції додавання та множення на дійсне число, скалярний добуток

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad x, y \in R^n,$$

та норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Відстань між точками задається функцією

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in R^n.$$

Одинична куля з центром у нулі простору R^n

$$S = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Тоді куля радіуса $r, r \geq 0$, з центром у точці x_0 має вигляд $x_0 + rS$, де $rS = \{rx : x \in S\}$. Позначимо $\text{int } S = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$ та множину $x_0 + \varepsilon \text{int } S$ назовемо -околом точки x_0 .

Точка x називається внутрішньою точкою множини $X, X \subset R^n$, якщо існує -оکیل цієї точки, що цілком знаходиться у X . Сукупність внутрішніх точок множини X утворює її внутрішність $\text{int } X$. Множина X є відкритою, якщо кожна її точка внутрішня.

Точка x називається граничною точкою множини $X, X \subset R^n$, якщо будь-який її оکیل містить нескінченно багато точок з X . Множина X називається замкнутою, якщо вона містить усі свої граничні точки.

Введемо операції над множинами в R^n :

- 1) об'єднання: $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ або } x \in Y\}$;
- 2) перетин: $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ та } x \in Y\}$;
- 3) сума: $X + Y = \{z : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$;
- 4) геометрична різниця (різниця Мінковського): $X \pm Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$.

Замкнута та обмежена множина в R^n – компакт. Нехай X – компакт з простору R^n . Позначимо через X_1 множину векторів $x \in X$, в яких перша компонента найменша, а через X_2 – множину векторів $x \in X$, в яких друга компонента найменша і так далі до X_n . Очевидно, що множина X_n складається з однієї точки x^* . Точку x^* називають лексикографічним мінімумом компакту X і позначають $x^* = \text{lex min } X$.

Якщо X – замкнута множина, то $X \pm Y$ – замкнута. Множина X обмежена, якщо існує таке число $r \in (0, +\infty)$, що $X \subset rS$. Якщо множина може бути отримана за допомогою зліченої кількості операцій об'єднання, перетину та доповнення над замкнутими або відкритими множинами, то така множина називається його борелівською. Більш широкий клас множин утворюють вимірні (за Лебегом) множини [18].

Множина елементів у просторі R^n , замкнута відносно операцій додавання та множення на число, назвемо лінійним підпростором. Якщо множина в R^n можна представити як суму лінійного підпростору та деякого елемента з R^n , то будемо називати його афінним многовидом. Множина в R^n є випуклою, якщо разом з кожними двома своїми точками вона цілком містить і відрізок, що їх з'єднує.

Розглянемо функцію $f(x), f: R^n \rightarrow R^1$. Вона називається напівнеперервною знизу (зверху) в точці x_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in x_0 + \delta S$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad (f(x) < f(x_0) + \varepsilon).$$

Функція, що є напівнеперервною знизу (зверху) в кожній точці множини, називається напівнеперервною знизу (зверху) на цій множині. Якщо функція напівнеперервна і знизу, і зверху, то вона неперервна.

Згідно з теоремою Вейєрштраса, скінчена функція, напівнеперервна знизу (зверху) на компактї, обмежена знизу (зверху) та досягає своєї нижньої (верхньої) межі.

Надграфіком функції $f(x)$ називається множина

$$\text{epi } f = \{(x, a): x \in R^n, a \in R^1, a \geq f(x)\},$$

ефективною множиною –

$$\text{dom } f = \{x \in R^n: f(x) < +\infty\},$$

а множиною рівня (лебегівською множиною) – $\{x \in R^n: f(x) < a\}$.

Властивості напівнеперервності знизу функції $f(x)$, замкненості надграфіка та замкненості множини рівня функції $f(x)$ еквівалентні. Функцію $f(x)$ назвемо борелівською, якщо усі її множини рівня борелівські. Функцію назвемо вимірною

(за Лебегом), якщо усі її лебегівські множини вимірні. Будь-яка борелівська функція буде вимірною за Лебегом, але не навпаки. Будь-яка напівнеперервна функція є борелівською.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана скінчена функція $f(x)$. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченої системи інтервалів $(a_1, b_1), \dots, (a_n, \dots, b_n)$, що перетинаються, та таких, що $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, вірна нерівність $|\sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k))| < \varepsilon$, то функція $f(x)$ називається абсолютно неперервною. Очевидно, що усяка абсолютно неперервна функція неперервна, але не кожна неперервна функція є абсолютно неперервною. Абсолютно вимірна функція відображає вимірну множину в вимірну множину [19].

Лема 1.1.1. Нехай X, Y, Z – компакти з R^n , функція $f(x), f: X \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська), а функція $q(y), q: Y \rightarrow Z$, – борелівська (напівнеперервна зверху). Тоді функція $h(x) = q(f(x)), h: X \rightarrow Z$, вимірна (борелівська) [19].

Зокрема, суперпозиція двох неперервних функцій є неперервною функцією. Визначимо стандартним чином інтеграл Лебега [18] від вимірної функції $f(x)$. Вимірна функція $f(x)$ називається інтегрованою на множині X , якщо інтеграл від неї існує і є скінченим.

Лема 1.1.2. Нехай X – компакт з $R^n, T > 0, f(t, x), f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, – обмежена вимірна по t та напівнеперервна зверху по x функція. Тоді функція $f(t) = \inf_{x \in X} f(t, x)$ вимірна на інтервалі $[0, T]$ [19].

Лема 1.1.3. Нехай X, Y – компакти з R^n , функція $f(x, y), f: X \times Y \rightarrow R^1$, – неперервна за сукупністю змінних, а $g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$. Тоді

- 1) Функція $g(x)$ неперервна по $x, x \in X$;
- 2) Багатозначне відображення $F(x) = \{y \in Y: f(x, y) = g(x)\}$ напівнеперервне зверху на X .
- 3) Якщо $F(x), x \in X$, складається з єдиного елемента $y(x)$, а вектор-функція похідних $grad_x f(x, y(x)), x \in X$.

Лема 1.1.4. Нехай X – компакт з $R^n, T > 0, f(t, x), f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, обмежена вимірна (борелівська) по t та неперервна по x функція, а

$x(t), x: [0, T] \rightarrow X$, вимірна (борелівська) функція. Тоді суперпозиція функцій $f(t) = f(t, x(t))$ є вимірною (борелівською) функцією на інтервалі $[0, T]$.

Нехай (X, F, λ) – вимірний простір, функція $f(x), f: X \rightarrow R^1$, – вимірна. Позначимо $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Інтегралом Лебега від вимірної функції $f(x)$ на множині $A \in F$ відносно міри λ називається величина

$$\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda.$$

Якщо $\int_A f^+ d\lambda < \infty, \int_A f^- d\lambda < \infty$, то функція $f(x)$ називається інтегрованою по A відносно λ .

Нехай $(X, F, \lambda) = ([a, b], S_{[a,b]}, \lambda_1)$. Тоді якщо функція $f(x)$ інтегрована за Риманом на $[a, b]$, то вона інтегрована на $[a, b]$ відносно λ_1 та

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

1.4.1 Елементи випуклого аналізу

Множина $X, X \subset R^n$, називається випуклою, якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in X$ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$ при $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Порожню множину будемо вважати випуклою.

Якщо X та Y – випуклі множини з R^n , то множини $X \cap Y, X + Y, \lambda X$, λ – число, випуклі. З випуклості множини X випливає випуклість множини $X \pm Y$. Замикання та внутрішність випуклої множини випуклі. Перетин усіх випуклих множин, що містять множину $X, X \subset R^n$, називають випуклою оболонкою (випукленням) множини X та позначають $co X$.

Теорема 1.2.1.(теорема Каратеодорі) Нехай X – множина з R^n . Тоді

$$co X = \{x \in R^n : x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, k \leq n + 1, x_1, \dots, x_k \in X, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0\}.$$

При цьому кажуть, що кожна точка $co X$ може бути представлена у вигляді випуклої комбінації точок з X . Якщо множина X – компакт в R^n , то $co X$ також є компактом [20].

Нехай X – непорожня множина з R^n . Позначимо

$$con X = \{z \in R^n : z = \lambda x, x \in X, \lambda > 0\}.$$

Надалі будемо розглядати власні функції, тобто такі, що не приймають значення $-\infty$ та не тотожно дорівнюють $+\infty$. Функцію $f(x), f: X \rightarrow R^1$, будемо називати випуклою на множині $X, X \subset R^n$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ вірною є нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

для усіх $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Прикладом власної функції є функція Мінковського (калібрувальна функція) [20]. Нехай X – випукла множина з R^n , така, що $0 \in int X$. Тоді

$$\mu_x(p) = \inf\{\alpha > 0 : p \in \alpha X\}, p \in R^n$$

називається функцією Мінковського. Якщо $p \notin \mu X$ для усіх $\mu \geq 0$, то покладемо $\mu_x(p) = \infty$.

Оберненою до калібрувальної функції є функція

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \geq 0: \alpha p \in X\}.$$

Вона визначена для усіх $p \in R^n$ та приймає скінченні значення, якщо $p \neq 0$.

Нехай X – випукла замкнена множина з R^n . Опорною функцією множини X назвемо величину

$$C(X; p) = \sup_{x \in X} (p, x), \quad p \in R^n$$

Тоді

$$X = \{x \in R^n: (p, x) \leq C(X; p) \quad \forall p \in R^n\}.$$

Опорна функція непорожньої випуклої замкненої множини є власною, випуклою, напівніперервною знизу та додатно однорідною. Остання властивість означає, що

$$C(X; \lambda p) = \lambda C(X; p), \quad \lambda > 0.$$

Будемо вважати, що $C(\emptyset; p) = -\infty$ для усіх $p \in R^n$.

Розглянемо деякі важливі властивості опорних функцій, які в подальшому будуть використані.

Властивість 1.2.1. Нехай X та Y – компакти з R^n . Тоді

$$C(X + Y; p) = C(X; p) + C(Y; p).$$

Властивість 1.2.2. Нехай X та Y – випуклі компакти з R^n . Тоді $X = Y$ тоді і тільки тоді, коли $C(X; p) = C(Y; p)$ для усіх $p \in R^n$.

Властивість 1.2.3. Нехай X та Y – випуклі компакти з R^n . Тоді $X \subset Y$ тоді і тільки тоді, коли $C(X; p) \leq C(Y; p)$ для усіх $p \in R^n$.

Властивість 1.2.4. Нехай X – випуклий компакт, а Y – випукла замкнена множина з R^n . Тоді $X \cap Y \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли

$$C(X; p) + C(Y; p) \geq 0 \quad \forall p \in R^n.$$

Властивість 1.2.5. Нехай X – компакт з R^n . Тоді

$$C(co X; p) = C(X; p).$$

Нехай множина X – компакт з R^n . Тоді

$$C(co X; p) = \max_{x \in X} (p; x).$$

1.4.2 Багатозначні відображення

Позначимо через 2^{R^n} множину усіх підмножин простору R^n , $K(R^n)$ – множина усіх непорожніх компактів з R^n , $co K(R^n)$ – множина усіх непорожніх випуклих компактів з R^n .

Багатозначним відображенням $F(x)$ будемо називати усяке відображення, що діє з R^n у 2^{R^n} та ставить у відповідність кожному елементу $x \in R^n$ деяку множину з R^n .

На множині $K(R^n)$ відстань будемо розраховувати наступним чином:

$$\begin{aligned} dist(X, Y) &= \inf\{\lambda \geq 0: X \subset Y + \lambda S, Y \subset X + \lambda S\} = \\ &= \max\left\{\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \|x - y\|, \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \|x - y\|\right\}. \end{aligned}$$

Тоді множина $K(R^n)$ стає метричним простором, а сама метрика називається хаусдорфовою [20].

Нехай задано багатозначне відображення $F(x)$, $F: R^n \rightarrow 2^{R^n}$. Тоді ефективною множиною є множина

$$\text{dom } F = \{x \in R^n: F(x) \neq \emptyset\}.$$

Багатозначне відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $X \subset \text{dom } F$ напівнеперервне зверху (знизу) в точці $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon S \quad (F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon S).$$

Відображення $F(x)$, що є напівнеперервним зверху (знизу) у кожній точці множини X , називається напівнеперервним зверху (знизу) на множині X . Багатозначне відображення неперервне, якщо воно напівнеперервне і зверху, і знизу.

Нехай задані багатозначних відображення $F_1(x)$, $F_1: X \rightarrow K(R^n)$, $F_2(x)$, $F_2: X \rightarrow K(R^n)$. Суперпозицією відображень $F_1(x)$ та $F_2(x)$ назовемо відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, що визначається наступним співвідношенням

$$F(x) = F_2(F_1(x)) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y).$$

Суперпозиція неперервних багатозначних відображень є неперервним багатозначним відображенням.

Відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, напівнеперервне зверху тоді і тільки тоді, коли його графік замкнений та воно обмежене в околі кожної точки $x \in R^n$.

Для багатозначного неперервного відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, характерним є те, що відображення $\alpha F(x)$, $\alpha \in R^1$, со $F(x)$

також неперервні. Якщо є задане ще й відображення $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$, то відображення $F(x) \cup G(x)$ та $F(x) + G(x)$ – неперервні.

Лема 1.3.1. Нехай задані напівнеперервні зверху відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та $H(x) = F(x) \cap G(x)$. Тоді відображення $H(x)$ напівнеперервне зверху на множині $\text{dom } H$.

Лема 1.3.2. Нехай задані напівнеперервне зверху відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, та напівнеперервне знизу відображення $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та $H(x) = F(x) \pm G(x)$. Тоді відображення $H(x)$ напівнеперервне зверху на множині $\text{dom } H$. [20, с.26]

Тоді має місце більш загальне твердження

Твердження 1.3.1. Нехай $F(x, y)$, $F: X \times Y \rightarrow K(R^n)$, $X, Y \in K(R^n)$ – неперервне багатозначне відображення. Тоді відображення $G(x) = \bigcap_{y \in Y} F(x, y)$ напівнеперервне зверху на множині $X \cap \text{dom } G$.

Однозначну функцію $f(x)$, $f: R^n \rightarrow R^n$, назовемо селектором багатозначного відображення $F(x)$, якщо $f(x) \in F(x)$ для усіх $x \in R^n$.

Теорема 1.3.1.(теорема Майкла). У напівнеперервного відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow co K(R^n)$, $X \in K(R^n)$, існує принаймні один неперервний селектор. Зокрема, селектором буде центр кулі, що описана навколо множини $F(x)$.

Відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow co K(R^n)$, в подальшому іноді будемо називати виуклозначним та компактозначним.

Багатозначне відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, будемо називати вимірним за Лебегом (Борелем), якщо множина X є вимірною за Лебегом (Борелем) та для будь-якої $Y \in K(R^n)$ множина $\{x \in X: F(x) \subset Y\}$ вимірна за Лебегом (Борелем). Для скорочення в подальшому будемо називати вимірні за Лебегом багатозначні відображення просто вимірними, а вимірні за Борелем – борелівськими.

Якщо відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та функція $\lambda(x)$, $\lambda: R^n \rightarrow R^1$, вимірні, то відображення $F(x) + G(x)$, $\lambda(x)F(x)$, $co F(x)$, $F(x) \cap G(x)$, $F(x) \cup G(x)$ – вимірні. Нехай $X \in K(R^n)$, а $\lambda(x)$, $\lambda: R^n \rightarrow R^1$,

напівнеперервна зверху (вимірна) функція. Тоді відображення $\lambda(x) \cdot X$ є борелівським (вимірним).

Лема 1.3.3. Нехай $X \in K(R^n), F(x), F: X \rightarrow K(R^n)$, – вимірне (борелівське) відображення. Тоді селектор $f(x) = \text{lex min } F(x), x \in X$, – вимірний (борелівський).

Лема 1.3.4. Нехай $X \in K(R^n)$, багатозначні відображення $F(x), F: X \rightarrow K(R^n), G(x), G: X \rightarrow K(R^n)$, вимірні (борелівські), а функція $f(x, y), x \in X, y \in G(x), f(x, y) \in R^n$, вимірна (борелівська) по x та неперервна по y . Тоді багатозначне відображення

$$H(x) = \{y \in G(x): f(x, y) \in F(x)\}$$

є вимірним (борелівським). [20].

Теорема 1.3.2. (теорема Філіпова-Кастена) [21] Нехай $T > 0, X, Y \in K(R^n), f(t, x), f: [0, T] \times X \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська) по t та неперервна по x функція, $g(t), g: [0, T] \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська) функція, а $F(t), F: [0, T] \rightarrow K(X)$, – вимірне (борелівське) відображення. Додатково, функція $g(t)$ така, що $g(t) \in f(t, F(t)), t \in [0, T]$. Тоді існує вимірний (борелівський) селектор $\xi(t)$ відображення $F(t)$ такий, що

$$g(t) = f(t, \xi(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Нехай $X \in K(R^n)$. Багатозначне відображення $F(x), F: X \rightarrow K(R^n)$, називається рівномірно обмеженим на множині X , якщо існує така константа $r > 0$, що $F(x) \subset rS \quad \forall x \in X$.

Нехай $F(\tau), F: [0, T] \rightarrow K(R^n)$, – вимірне відображення. Інтегралом від багатозначного відображення $F(\tau)$ назовемо множину

$$\int_0^T F(\tau) d\tau = \left\{ x \in R^n : x = \int_0^T f(\tau) d\tau, f(\tau) \in F(\tau) \text{ для } \tau \in [0, T] \right\}.$$

Лема 1.3.5. Нехай $F(\tau), F: [0, T] \rightarrow K(R^n)$, — вимірне відображення, рівномірно обмежене на інтервалі $[0, T]$. Тоді $\int_0^T F(\tau) d\tau$ — випуклий компакт з R^n такий, що

$$\int_0^T F(\tau) d\tau = \int_0^T co F(\tau) d\tau.$$

Лема 1.3.6. Нехай $X \in K(R^n)$ та $\alpha(\tau), \alpha: [0, \infty) \rightarrow R^1$, — невід’ємна, обмежена, вимірна функція. Тоді

$$\int_0^T \alpha(\tau) X d\tau = \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \cdot co X, \quad T > 0.$$

Позначимо через Ω_X сукупність вимірних функцій $x(t), t \geq 0$, за значеннями з $X \in K(R^n)$.

Лема 1.3.7. Нехай $X \in K(R^n), f(\tau, x), f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, — вимірна по τ та неперервна по x функція, рівномірно обмежена на $[0, T] \times X$. Тоді

$$\inf_{x(\cdot) \in \Omega_X} \int_0^T f(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^T \inf_{x \in X} f(\tau, x) d\tau.$$

[19].

Лема 1.3.8. Нехай $X, Y, M \in K(R^n), F(x, y), F: X \times Y \rightarrow K(R^n)$, — напівнеперервне зверху багатозначне відображення, $f(x), f: X \rightarrow R^n$, — неперервна

функція, а також $f(x) \cap M = \emptyset$ та $\overline{\text{con}}(M - f(x)) \cap F(x, y) \neq \emptyset \quad \forall x \in X, y \in Y$. Тоді функція $\alpha: X \times Y \rightarrow R^1$, визначена формулою

$$\alpha(x, y) = \max \{ \alpha \geq 0: \alpha(M - f(x)) \cap F(x, y) \neq \emptyset \}$$

напівнеперервна зверху на множині $X \times Y$ [20, с.29].

Лема 1.3.9. Нехай $X \in K(R^n)$, багатозначні відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, та $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$, напівнеперервні зверху, а функція $f(x, y)$, $x \in X, y \in G(x), f(x, y) \in R^n$, неперервна. Тоді багатозначне відображення

$$H(x) = \{y \in G(x): f(x, y) \in F(x)\}$$

напівнеперервне зверху [20, с.26].

Висновки до розділу 1

Отже, задачі переслідування часто зустрічаються в нашому сучасному житті і тому є актуальною темою для досліджень. Вони основані на конфліктно-керованих процесах, а рух учасників описується диференціальними рівняннями.

В першому розділі ми розглянули основні поняття теорії ігор, її класифікацію. Описали теореми та означення що застосовуються для подальшого дослідження диференціальних ігор. Також розглянули методи розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 2 МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

2.1 Класифікація процесів, означення стратегій, постановка задачі.

Нехай рух керуючого об'єкта в просторі R^n описується рівнянням

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad (2.1)$$

де z — фазовий вектор, що складається з геометричних координат, швидкостей, прискорень переслідувача і втікача;

A — квадратна матриця порядку n ;

$\varphi(u, v), \varphi: U \times V \rightarrow R^n$ — неперервна за сукупністю змінних функція – блок управління;

U та V — параметри управління переслідувача та втікача, які вибираються з областей управління U та V , що являються непустими ком пактами простору R^n .

Вибираючи свої управління у вигляді деяких функцій, кожний з гравців впливає на процес (2.1), за для своїх цілей. Ціль переслідувача — вивести траєкторію процесу (2.1) на деяку замкнуту множину M^* , яке ми назвемо термінальним, якомога швидше, ціль втікача — відвернути траєкторію процесу (2.1) від зустрічі з множиною M^* на всьому напівнескінченному інтервалі часу, якщо це неможливо, то максимально відтягнути момент зустрічі. Найчастіше в задачах переслідування-втікання термінальна множина M^* є циліндром в множині R^n

$$M^* = M^\circ + \varepsilon S, \quad (2.2)$$

де M° — лінійний підпростір простора R^n ; S — куля з ортогонального доповнення до M° в просторі R^n , $\varepsilon \geq 0$. Конфліктно керований процес (2.2) будемо називати квазілінійним. Його особливість в тому, що блок управління нелінійно залежить від параметрів, що пов'язані між собою і можуть впливати один на одного. Якщо $\varphi(u, v) = u - v$, то процес

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad (2.3)$$

є лінійним. Незважаючи на той факт, що керуючі параметри розділені, процес (2.3) не може бути представлений у вигляді двох незалежних лінійних процесів, одним з яких управляє переслідувач, а іншим — втікач. Частинним випадком процесу (2.3) є лінійний процес з розділеним рухом

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + u, & x \in R^k, \\ \dot{y} = Cy + v, & y \in R^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

де B та C — квадратні матриці порядку k і m відповідно, $k + m = n$.

Узагальнений контрольний приклад Л.С.Пантрягіна

Рух втікача і переслідувача задається рівняннями:

$$\begin{cases} x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \dots + a_{p-1} \dot{x} + a_p x = u, & x \in R^s, u \in U, \\ y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + \dots + b_{q-1} \dot{y} + b_q y = v, & y \in R^s, v \in V. \end{cases} \quad (2.5)$$

де $x^{(i)}$, $y^{(j)}$ — похідні за часом порядку $i, j, k = p \cdot s, m = q \cdot s$.

Термінальна множина задається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$. В цьому

випадку будемо говорити про захват. Якщо $p > q$, то говорять, що переслідуювач має більшу інертність ніж втікач, але меншу маневреність. Якщо $p = q$, то об'єкти мають однакову інертність і однакову маневреність.

Контрольний приклад Л.С.Пантрягіна

Рух втікача і переслідуювача задається рівняннями:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha = \rho u, & x \in R^3, ||u|| \leq 1, \alpha, \rho > 0 \\ \ddot{y} + \beta i = \sigma v, & y \in R^3, ||v|| \leq 1, \beta, \sigma > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Кожне з цих рівнянь є проявленням другого закону Ньютона про руху тіла одиничної маси під дією керуючої сили з урахуванням сили тертя, яка лінійно залежить від швидкості.

Якщо термінальна множина задається рівністю $x = y$, то будемо говорити про точне спів падіння геометричних координат. Якщо множина M' означена за допомогою рівності $x = y$, $\dot{x} = \dot{y}$, то говорять про «м'яку посадку», про «м'яку зустріч».

Процес коливання — це ще один приклад процесів другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a^2 x = u, & x \in R^3, ||u|| \leq \sigma, \\ \ddot{y} + b^2 y = v, & y \in R^3, ||v|| \leq \rho. \end{cases} \quad (2.7)$$

де a і b задають амплітуди коливання.

Кожна з однорідних систем задає періодичний рух, що описує коливання математичного маятника. Термінальна множина задається рівністю $x = y$.

Розглянемо найпростіший приклад взаємодії гравців з різною інертністю:

$$\begin{cases} \ddot{x} = u, & x \in R^3, ||u|| \leq 1, \\ \ddot{y} = v, & y \in R^3, ||v|| \leq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Переслідувач («крокодил») неповороткий, так як його траєкторія має обмежений радіус кривизни, але може набирати велику швидкість. Втікач без інерційний, але має обмежену швидкість. Термінальна множина визначається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Будемо говорити, що процес задається простим рухом, якщо

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x \in R^3, \|u\| \leq a, \\ \dot{y} = v, & y \in R^3, \|v\| \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Кожний з об'єктів без інерційний і його маневреність необмежена. Термінальна множина задається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Будь-який з процесів (2.5) — (2.9) може бути проведений до вигляду (2.4) або (2.3) за допомогою відповідної заміни змінних. Коли задана динаміка процесу, термінальна множина та визначений критерій якості (в нашому випадку це завжди час) залишається визначити інформованість гравців про поточний фазовий вектор та взаємному виборі керування.

Нехай $z(0) = z^\circ$ — початковий стан процесу (2.1). Позначимо

$$\Omega_U = \{u(\cdot): u(t) \in U, t \geq 0, u(t) - \text{вимірний}\}$$

$$\Omega_V = \{v(\cdot): v(t) \in V, t \geq 0, v(t) - \text{вимірний}\},$$

Функцію $u(\cdot) \in \Omega_U$ ($v(\cdot) \in \Omega_V$), вибрану переслідувачем (втікачем) за початковою позицією z° , назовемо програмним керуванням переслідувача (втікача).

Назовемо передісторією управління втікача в момент $t, t \geq 0$, функцію

$$v_t(\cdot) = \{v(s): v(s) \in V, s \in [0, t], v(s) - \text{вимірний}\}.$$

Будемо говорити, що задана квазістратегія переслідувача, якщо визначено відображення $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, що ставить у відповідність початковому стану z° , кожному моменту часу $t \geq 0$ та будь-якій передісторії управління втікача $v_t(\cdot)$ вимірну функцію $u(t) = U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, $t \geq 0$, зі значеннями з області управління U . При цьому має виконуватись умова «фізичної здійсненності», тобто, якщо $v^1(\cdot) \in \Omega_v$, $v^2(\cdot) \in \Omega_v$ та $v^1(t) = v^2(t)$ майже всюди для $t \geq 0$, то відповідні їм функції $u^1(t), u^2(t)$ при відображенні $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, також рівні майже всюди для $t \geq 0$.

Аналогічно задається квазістратегія втікача. Окремим випадком квазістратегій є стробоскопічні стратегії, визначають контруправління. Для їхнього формального визначення досить у визначенні квазістратегії замість відображення $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$ взяти відображення $U(z^\circ, v_t(t))$ з відповідними змінами. Інакше кажучи, контруправління переслідувача будується на основі знань про початковий стан z° процесу (2.1) та миттєвому значенні управління втікача $u(t) = u(z^\circ, v(t))$, $t \geq 0$. Контруправління втікача визначається симетрично: $v(t) = v(z^\circ, u(t))$, $t \geq 0$. Зрозуміло, що при цьому повинні виконуватись включення $u(\cdot) \in \Omega_U$, $v(\cdot) \in \Omega_V$.

Якщо в ході процесу (2.1) в момент $t \geq 0$ переслідувачу або втікачу відомий поточний фазовий вектор $z(t)$, то будемо говорити про позиційні стратегії та управління.

Ототожнимо позиційні стратегії з функціями $u(z)$, $v(z)$, $u(z) \in U$, $v(z) \in V$. Причому при підстановці позиційних управлінь $u(z)$, $v(z)$ в систему управлінь (2.1) повинно існувати розв'язок по Каратеодорі. Ця умова не буде порушена, якщо, наприклад, управління $u(z)$, $v(z)$ неперервно залежать від позиції.

Якщо управління гравців обираються у вигляді функцій $u(z, v)$, $v(z, u)$, то будемо говорити про позиційних контруправліннях. При цьому функції

$$u(t, z) = u(z, v(t)) \in U,$$

$$v(t, z) = v(z, u(t)) \in V$$

Повинні бути вимірними за часом та неперервні по z . Якщо управління не є неперервними функціями від позиції, то потрібно розглядати рівняння з розривною правою частиною, диференціальні включення.

Під час вивчення конфліктно керованого процесу (2.1), (2.2) приймемо бік одного з гравців і постараємося отримати деякий гарантований для нього результат за будь-якої протидії противника. В цій ситуації досить визначити клас управлінь однієї зі сторін, а для іншої можна розглядати як завгодно широкий клас управлінь, сумісний з даним.

Для всіх заданих вище класів стратегій можуть бути поставлені наступні задачі.

2.2 Основна схема метода

Заданий квазілінійний конфліктно-керований процес

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), z \in R^n, u \in U, v \in V, \quad (2.10)$$

де A — постійна квадратна матриця,

$\varphi: U \times V \rightarrow R^n$ — неперервна по сукупності змінних.

Термінальна множина є циліндричною та має вид

$$M^{\circ} = M^{\circ} + M, \quad (2.11)$$

де M° — лінійний підпростір з R^n ,

M — непустий компакт з ортогонального доповнення $L \times M^{\circ}$ в просторі R^n .

Переслідуювач використовує квазістратегії, а втікач — програмні управління.

Для конфліктно-керуючого процесу (2.10), (2.11) розглядається локальна задача зближення з фіксованим часом. Позначимо через π — оператор ортогонального проектування з R^n на L , через e^{tA} — фундаментальну матрицю однорідної системи $\dot{z} = Az$, а $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$ для $v \in V$.

Розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v),$$

$$W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), t \geq 0.$$

Умова 2.2.1 (умова Л.С. Пантрягіна). Відображення $W(t) \neq \emptyset$ для всіх $t \geq 0$.

Замітка 2.2.1. Для лінійного процесу (2.3)

$$W(t) = \pi e^{At} U^* - \pi e^{At} V$$

З умови 2.2.1 слідує, що $\text{dom } W(t) = [0, \infty)$. Так як багатозначне відображення $W(t, v)$ на множині $[0, \infty) \times V$, то в силу твердження 1.3.1 $W(t)$ напівнеперервне зверху, а значить борелівське. В наслідок, згідно лемі 1.3.6 існує хоча б один борелівський селектор $\gamma(t)$, $\gamma(t) \in W(t)$, $t \geq 0$.

Позначимо через $\Gamma = \{\gamma(\cdot): \gamma(t) \in W(t), t \geq 0\}$ сукупність борелівських селекторів багатозначного відображення $W(t)$. Зафіксуємо деякий елемент $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, покладемо

$$\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = \pi e^{At} z + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

і розглянемо розв'язуючу функцію

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \sup \{ \alpha \geq 0 : [W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \}, \quad (2.12)$$

Легко побачити, що так як $0 \in W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)$ для всіх $v \in V, t \geq \tau \geq 0$, то при $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \in M$ функція $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = +\infty$ для всіх $\tau \in [0, t], v \in V$. Якщо ж $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M$, то розв'язуюча функція (2.12) приймає скінченні значення, вона до того ж рівномірна по $\tau \in [0, t], v \in V$ обмежена.

Лема 2.2.1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.2.1 і для деяких $t, z, \gamma(\cdot)$, $t > 0$, $z \in R^n$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M$. Тоді розв'язуюча функція (2.12) борелівська по (τ, v) , і напівнеперервна зверху по $v, \tau \in [0, t], v \in V$.

Лема 2.2.2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.2.1 і для деякого елемента $z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, $T(z, \gamma(\cdot)) < +\infty$. Тоді нижня границя по часу досягається.

Теорема 2.2.1. [Чикрій] Нехай для конфліктно керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.2.1, множина M — випукла, для початкового стану z° і деякого селектора $\gamma^\circ(\cdot) \in \Gamma$. $T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)) < +\infty$. Тоді траєкторія процесу (2.10) може бути приведена з початкового стану z° на термінальну множину в момент $T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))$.

Доведення. Нехай $T = T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))$, $v(\tau) \in V, \tau \in [0, T]$ — довільна вимірна функція. Розглянемо випадок $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \notin M$. Введемо контрольну функцію

$$h(t) = h\left(T, t, z^\circ, v(\cdot), \gamma^\circ(\cdot)\right) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau.$$

Функція $h(t)$ неперервна, не зростає і $h(0) = 1$. З визначення моменту T слідує, що існує таке $t_* = t_*(v(\cdot))$, $0 < t_* \leq T$, що $h(t_*) = 0$. Вкажемо спосіб вибору управління переслідувача.

Розглянемо многозначне відображення

$$\begin{aligned} U_1(\tau, v) = \{u \in U: & \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma^\circ(T - \tau) \\ & \in \alpha\left(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)\right) \left[M - \xi\left(t, z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)\right)\right]\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу леми 1.3.7, воно борелівське по совокупності (τ, v) . Тоді селектор

$$u_1(\tau, v) = \text{lex min} U_1(\tau, v), \quad (2.14)$$

є борелівським по (τ, v) функції (лема 1.3.6). Управління переслідувача на інтервалі $[0, t_*)$ буде рівним

$$u(\tau) = u_1(\tau, v(\tau)). \quad (2.19)$$

Згідно леми 1.1.1, $v(\tau)$ — вимірною функцією.

Розглянемо багатозначне відображення

$$U_2(\tau, v) = \{u \in U: \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma^\circ(T - \tau) = 0\} \quad (2.15)$$

В силу леми 1.3.7, воно також борелівське по (τ, v) . Тоді селектор

$$u_2(\tau, v) = \text{lex min} U_2(\tau, v) \quad (2.16)$$

є борелівським по (τ, v) функцією (лема 1.3.6). Управління переслідувача на інтервалі $[t_*, T]$ буде рівним

$$u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau)) \quad (2.17)$$

Згідно лемі 1.1.1, $u(\tau)$ є вимірною функцією.

Нехай $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \in M$. Тоді управління переслідувача на інтервалі $[0, T]$ буде рівним $u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$. Покажемо, що при такому виборі законів управління переслідувача траєкторія процесу (2.10) в момент T попаде на множину M° при будь-якому управлінні втікача.

З формули Коши для процесу (2.10) слідує

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^\circ + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau \quad (2.18)$$

Проаналізуємо спочатку випадок $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \notin M$. Для цього додамо і віднімемо з правої частини рівності (2.18) величину $\int_0^T \gamma^\circ(T-\tau) d\tau$. Тоді, враховуючи закони вибору управління переслідувачем (2.13) – (2.17), отримуємо включення

$$\begin{aligned} \pi z(T) \in & \xi(T, z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))(1 \\ & - \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau + \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) M d\tau). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням рівності $\int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau = 1$, випуклості множини M з лемі 1.3.9 маємо $\pi z(T) \in M$.

Нехай $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \in M$. Тоді, враховуючи закон вибору управління переслідувачем, з представлення (2.18) отримуємо включення $\pi z(T) \in M$. Останнє рівносильне включенню $z(T) \in M^\circ$.

Замітка 2.2.1. Управління переслідувача будувалось у вигляді контуправлінь (2.19), (2.17). Однак для визначення моменту t_* — моменту переключення з закону управління (2.19) на закон (2.17) необхідна інформація в момент t про всю передісторію управління втікача $v_t(0)$. Тому в цілому стратегію переслідувача, реалізуючи теорему 2.2.1, слід класифікувати як квазістратегію.

Замітка 2.2.2. Момент T є фіксованим в тому сенсі, що похибки втікача (вони породжують момент переключення t_*), загалом говорячи, не можуть бути використані, а час T не може бути зменшений в рамках даної схеми.

Замітка 2.2.3. Якщо в схемі методу вибрати селектор $\gamma(\cdot)$ не борелівським, а вимірним, то слід, що враховуючи лему 1.1.4, додатково вимагати, щоб розв'язуюча функція $\alpha(T, \tau, z, v(\tau), \gamma(\cdot))$ була вимірною по $\tau, \tau \in [0, t]$, при будь-яких $v(\cdot) \in \Omega_V$ та фіксованих $t > 0, z \in R^n, \gamma(\cdot)$. Достатньою умовою для цього є вимога, щоб при фіксованих $t, z, \gamma(\cdot)$ розв'язуюча функція була нормальним інтервалом, тобто щоб багатозначне відображення

$$F(\tau) = \{(\alpha, v) \in R^1 \times R^n: \alpha \geq \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))\}$$

було вимірним і замкнутим.

Крім того, для вибору управлінь переслідувача замість відповідних (2.13) – (2.17) слід скористатись теоремою Філіпова-Кастена, так як при вимірному селекторі $\gamma(\cdot)$ співвідношення (2.19), (2.17), не забезпечують вимірність управління $u(\tau)$.

З приведеної схеми видно, що центральну роль у визначенні часу $T(z, \gamma(\cdot))$ і при побудові управління переслідувача на «активному» участку грає роль розв'язуюча функція.

Введемо розв'язуючу функцію в вигляді

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) \\ = & \left\{ \max \{ \alpha \geq 0 : \{W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)\} \cap \alpha \{M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))\} \neq \emptyset, \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M \right. \\ & \left. \alpha(t, \tau), \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \in M \right. \\ & \left. t \geq \tau \geq 0, z \in R^n, v \in V, \gamma(\cdot) \in \Gamma \right\} \end{aligned}$$

де $\alpha(t, \tau)$ — довільна невід’ємна обмежена вимірна функція, що задовольняє умову $\int_0^t \alpha(t, \tau) d\tau = 1$ для всіх $t \geq 0$.

Якщо через $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ визначити по формулі функцію $T(z, \gamma(\cdot))$, то вона буде такою ж самою. Більше того теорема 2.2.1 та її доведення не змінюються якщо замість функції $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ використовувати функцію $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$.

В деяких випадках функція $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ зручніша за функцію $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$, так як вона всюди скінченна.

Лема 2.2.3. Нехай для конфліктно керованого процесу (2.10), (2.11) виконана умова 2.2.1, відображення $W(t, v)$ випуклоозначено для $t \geq 0$, $v \in V$, а множина M — випукла. Тоді, якщо $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M, t \geq 0, z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, то

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \inf_{p \in P(t, z)} \left\{ \frac{C(W(t - \tau, v); p) - (p, \gamma(t - \tau))}{-C(M; -p) - (p, \xi(t, z, \gamma(\cdot)))} \right\}, t \geq \tau \geq 0,$$

$v \in V$

де $P(t, z) = \{p \in L: \|p\| = 1, C(M; -p) + (p, \xi(t, z, \gamma(\cdot))) < 0\}$.

Наслідок 2.2.1. Нехай конфліктно керований процес (2.10), (2.11) лінійний ($\varphi(u, v) = u - v$), виконується умова 2.2.1, відображення $pe^{At}U$ випуклозначне для $t \geq 0$, а множина M — випукла. Тоді якщо $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M, t \geq 0, z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, тоді розв’язуюча функція $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ вігнута по v на множині V , а виходячи з цього неперервна на множині r, V .

Лема 2.2.4. Нехай конфліктно керований процес (2.10), (2.11) лінійний, виконується умова 2.2.1, існує неперервна додатня функція $r(t)$, $r: R^+ \rightarrow R^+$, і число $l \geq 0$ такі що

$$\pi e^{At}U = r(t)S, \quad M = lS,$$

де S — одинична куля простору L з центром в нулі.

Тоді розв'язуюча функція $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$, $t \geq \tau \geq 0$, $z \in R^n$, $v \in V$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, при $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin lS$ є великим додатнім коренем квадратного рівняння

$$\|\pi e^{A(t-\tau)}v + \gamma(t - \tau) - \alpha\xi(t, z, \gamma(\cdot))\| = r(t - \tau) + \alpha l$$

відносно α .

Висновки до розділу 2

У даному розділі був розглянутий метод розв'язуючих функцій в задачі зближення. Були розглянуті теореми та основні поняття.

Показали теореми, в яких сформульовані необхідні умови завершення гри переслідування та побудовані відповідні керування.

РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА ТРАЄКТОРІЇ РУХУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

3.1 Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна

Рух переслідувача і втікача задається рівняннями

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, & x \in R^s, & s \geq 2, & \|u\| \leq 1, & \alpha, \rho > 0, \\ y'' + \beta \dot{y} = \sigma v, & y \in R^s, & \|v\| \leq 1, & \beta, \sigma > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$. Перейдемо до системи рівнянь першого порядку. Для цього введемо нові змінні

$$\begin{aligned} z_1, z_2, z_3, \text{column}(z_1, z_2, z_3) &= z, \\ z_1 &= x - y, & z_2 &= \dot{x}, & z_3 &= \dot{y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При диференціюванні по часу співвідношення (3.2) з урахуванням (3.1), отримуємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u, \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \sigma v. \end{cases}$$

Термінальна множина $M^* = \{z: z_1 = 0\}$, причому,

$$M^\circ = \{z: z_1 = 0\}, \quad M = \{z: z_1 = z_2 = z_3 = 0\}.$$

Тоді $L = \{z: z_2 = z_3 = 0\} = \{R^s, 0, 0\}$. Оператор ортогонального перетворення $\pi: R^{3s} \rightarrow L$ задається матрицею

$$\pi = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де 0 — нульова матриця порядку s , і виділяє з вектора z його першу компоненту, $\pi z = z_1$. Матриця A має вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E & -E \\ 0 & -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 & -\beta E \end{pmatrix}$$

області управління

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix} : \|u\| \leq 1 \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma v \end{pmatrix} : \|v\| \leq 1 \right\}.$$

Фундаментальна матриця однорідної системи

$$e^{At} = \begin{pmatrix} E & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} E & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} E \\ 0 & e^{-\alpha t} E & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} E \end{pmatrix}$$

Так як $u \in S, v \in S$, то

$$\pi e^{At} U = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho S, \quad \pi e^{At} V = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma S$$

$$W(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho S - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma S = \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma \right) S = w(t) S$$

Таким чином, багатозначне відображення $W(t)$ являє собою кулю змінного радіуса $w(t)$ з центром в нулі простору R^S . Цей радіус невід'ємний для всіх $t > 0$ (виконана умова 2.2.1), якщо $\rho \geq \sigma$,

$$\frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta} \quad (3.3)$$

і строго додатній, якщо хоча б одне з нерівностей (3.3) строге. Вважаючи, що виконуються нерівність (3.3), покладемо $\gamma(t) \equiv 0$. Тоді

$$\xi(t, z, 0) = z_1 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2 - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} z_3.$$

Розв'язуюча функція

$$\alpha(t, \tau, z, v, 0) = \sup \left\{ \alpha \geq 0: -\alpha \xi(t, z, 0) \in \frac{1 - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha} \rho S - \frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma v \right\}.$$

У випадку $\xi(t, z, 0) \neq 0$ згідно лемі 2.2.4 для означення явного виду функції $\alpha(t, \tau, z, v, 0)$ маємо квадратне рівняння

$$\left| \frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma v - \alpha \xi(t, z, 0) \right| = \frac{1 - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha} \rho$$

відносно α . Розв'язав його, отримуємо

$$\begin{aligned}
& \alpha(t, \tau, z, v, 0) = \\
& = \frac{\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma(v, \xi(t, z, 0))}{\|\xi(t, z, 0)\|^2} \\
& + \frac{((\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma)^2 (v, \xi(t, z, 0))^2 + \|\xi(t, z, 0)\|^2 (\left(\frac{1 - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha}\right)^2 \rho^2 - (\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta})^2 \sigma^2 \|v\|^2))^{1/2}}{\|\xi(t, z, 0)\|^2}
\end{aligned}$$

Далі

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha(t, \tau, z, v, 0) = \frac{w(t - \tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$$

причому мінімум досягається на векторі $v = -\frac{\xi(t, z, 0)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$

Час затримання втікача $T(z, 0)$ визначимо як $\min \{t \geq 0: \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau\}$

3.2 Розв'язання задачі методом розв'язуючих функцій

Тепер, скориставшись схемою, що вказана вище, розв'яжемо наступний приклад за допомогою метода розв'язуючих функцій: знайдемо час затримання втікача за заданих початкових умов та побудуємо управління переслідуювача. А потім перевіримо програму, що розраховує час затримання на нашому контрольному прикладі.

Нехай $\alpha = 1, \beta = 2, \rho = 2, \sigma = 1, \begin{cases} x(0) = 6, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 2, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$

Підставимо значення параметрів у (3.1)

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = 2u, & x \in R, & \|u\| \leq 1, & \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{y} = v, & y \in R, & \|v\| \leq 1, & \beta, \sigma > 0. \end{cases}$$

Перевіримо виконання умови (3.3) $2 \geq 1$,

$$\frac{2}{1} \geq \frac{1}{2}$$

Переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$. Перейдемо до системи рівнянь першого порядку. Застосуємо заміну (3.2).

Отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 = -z_2 + 2u, \\ \dot{z}_3 = -2z_3 + v. \end{cases}$$

Термінальна множина $M^* = \{z: z_1 = 0\}$, при чому,

$$M^\circ = \{z: z_1 = 0\}, \quad M = \{z: z_1 = z_2 = z_3 = 0\}.$$

Тоді $L = \{z: z_2 = z_3 = 0\} = \{R, 0, 0\}$. Оператор ортогонального перетворення $\pi: R^s \rightarrow L$ задається матрицею

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Матриця A має вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

області управління

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} : ||u|| \leq 1 \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} : ||v|| \leq 1 \right\}.$$

Фундаментальна матриця однорідної системи буде мати вигляд:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-t}}{1} & -\frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Так як $u \in S, v \in S$, то

$$\pi e^{At}U = \frac{1-e^{-1t}}{1}2S, \quad \pi e^{At}V = \frac{1-e^{-2t}}{2}S$$

$$W(t) = \frac{1-e^{-t}}{1}2S * \frac{1-e^{-2t}}{2}S = \left(\frac{1-e^{-t}}{1}2 - \frac{1-e^{-2t}}{2} \right) S = w(t)S$$

Покладемо $\gamma(t) \equiv 0$, $z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\xi(t, z, 0) = 4 + \frac{1-e^{-t}}{1}1 - \frac{1-e^{-2t}}{2}1.$$

Розв'язуюча функція $\alpha(t, \tau, z, v, 0)$ буде великим додатнім коренем квадратного рівняння

$$\left\| \frac{1 - e^{-2(t-\tau)}}{2} v - \alpha \xi(t, z(0), 0) \right\| = \frac{1 - e^{-(t-\tau)}}{1} 2$$

відносно α .

Далі знайдемо Час затримання втічка $T(z(0), 0)$ визначимо як

$$\min \{t \geq 0: \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{||\xi(t, z, 0)||} d\tau\}$$

$$\int_0^t \frac{w(t-\tau)}{||\xi(t, z, 0)||} d\tau = 1$$

$$\int_0^t \frac{1 - e^{-(t-\tau)}}{1} 2 - \frac{1 - e^{-2(t-\tau)}}{2} d\tau = 4 + \frac{1 - e^{-t}}{1} - \frac{1 - e^{-2t}}{2}$$

$$\frac{3}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t} + 2e^{-t} - \frac{7}{4} = 4\frac{1}{2} - e^{-t} + e^{-2t} = 0$$

$$t = 5$$

Знайдемо управління переслідувача.

Скористаємося формулами (2.13)-(2.17) і знайдемо $u(\tau)$.

Так як рух відбувається на площині та множина M складається з однієї точки

$$\pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma^\circ(T - \tau) = \alpha \left(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot) \right) \left[M - \xi \left(T, z^\circ, \gamma^\circ(\cdot) \right) \right]$$

$$\pi e^{A(T-\tau)} (u - v(\tau)) = -\alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), 0) [\xi(T, z^\circ, 0)]$$

$$u = v(\tau) - \frac{\alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), 0) [\xi(T, z^\circ, 0)]}{\pi e^{A(T-\tau)}}$$

$$T = 5$$

$$u1 = v(\tau) - \frac{\alpha(5, \tau, z^\circ, v(\tau), 0)[\xi(5, z^\circ, 0)]}{\pi e^{A(5-\tau)}}$$

$$u = \text{lex min } u1$$

3.3 Візуалізація диференціальної гри на площині

Для представлення траєкторій рухів переслідувачів та втікача у грі, описаній у попередньому пункті та для випадку площини, був створений ПП на мові програмування Python. ПП є прототипом системи моделювання «переслідувачі-втікач», яку можна буде застосовувати для вибору керування в задачах керування.

Для програми вхідними даними є наступні відомості:

- Значення параметрів $\alpha, \beta, \sigma, \rho$;
- Початкові координати всіх учасників;

Розглянемо алгоритм за яким працює ПП:

1. Перевіряємо умов $\rho \geq \sigma, \frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}$
2. Знаходимо фундаментальну матрицю e^{At} .
3. Перевіряємо умову $W(t) \neq \emptyset$, та знаходимо $w(t)$
4. Знаходимо $\xi(t, z, 0) = z_1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3$
5. Знаходимо час затримки втікача як $\min \{t \geq 0: \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau\}$
6. Будуємо керування переслідувача як

$$u = v(\tau) - \frac{\alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), 0) [\xi(T, z^\circ, 0)]}{\pi e^{A(T-\tau)}}$$

$$\begin{aligned} \alpha(t, \tau, z, v, 0) = & \frac{\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma(v, \xi(t, z, 0))}{\|\xi(t, z, 0)\|^2} \\ & + \frac{((\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta} \sigma)^2 (v, \xi(t, z, 0))^2 + \|\xi(t, z, 0)\|^2 ((\frac{1 - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha})^2 \rho^2 - (\frac{1 - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta})^2 \sigma^2 \|v\|^2))^{1/2}}{\|\xi(t, z, 0)\|^2} \end{aligned}$$

7. За допомогою метода Рунге-Кутти будемо розв'язки диференціальних рівнянь в момент часу t .

Застосуємо цей контрольний приклад для перевірки роботи програми.

Нехай $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\rho = 2$, $\sigma = 1$, $\begin{cases} x(0) = 6, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 2, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$

```
===== KLT
Input alpha 1
Input beta 2
Input ro 2
Input sigma 1
Input x(0) 6
Input x'(0) 1
Input y(0) 2
Input y'(0) 1
=.
```

Рисунок 3.1 – Введення даних в програму

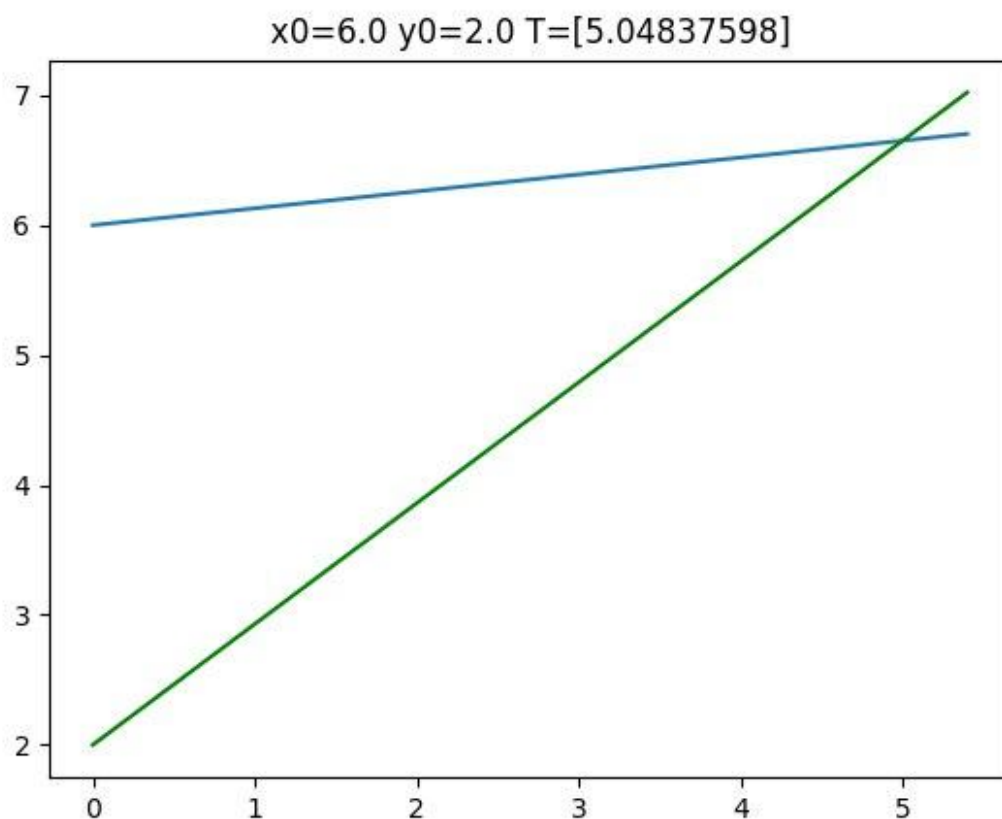


Рисунок 3.2 – Побудова графіків руху втікача та переслідувача

Як бачимо результати виявилися однаковими $T=5$.

Висновки до розділу 3

Була розв'язана задача методом розв'язуючих функцій. Розроблений програмний продукт, що знаходить час затримки втікача та будує управління переслідувача, за заданими параметрами та початковими координатами.

РОЗДІЛ 4: ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

4.1 Постановка задачі проектування

Спроектувати програмний продукт для розв'язання локальної задачі зближення. Він призначений для використання в середовищах що підтримують технології Python.

4.2 Обґрунтування функцій та параметрів програмного продукту

Головна функція F_0 — розробка програмного продукту, який аналізує процес за вхідними даними та будує його модель для розв'язання локальної задачі зближення. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції ПП:

- 1) F_1 — вибір мови програмування;
- 2) F_2 — використання готових бібліотек;
- 3) F_3 — інтерфейс користувача.

Кожна з основних функцій може мати декілька варіантів реалізації.

Функція F_1 :

- 1) мова програмування Matlab;
- 2) мова програмування Python;

Функція F_2 :

- 1) написання алгоритмів роботи з даними вручну;
- 2) використання готових бібліотек;

Функція F_3 :

- 1) використання командної стрічки;
- 2) використання Tkinter.

Виходячи з представлених варіантів будуюмо морфологічну карту (рисунок 0.1).

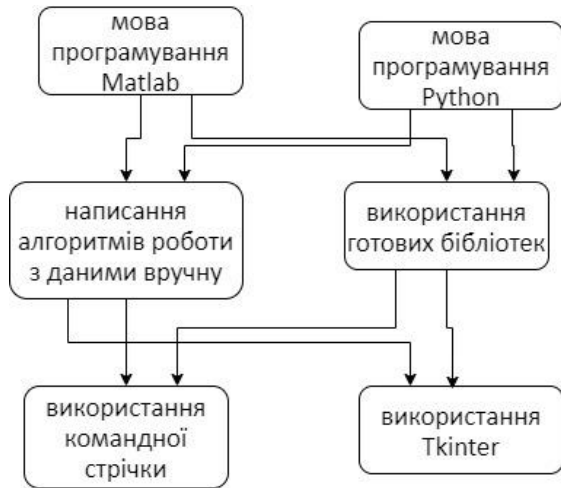


Рисунок 0.1 — Морфологічна карта

Таблиця 0.1 — Позитивно-негативна матриця

Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	А	Висока швидкість роботи програми	Багато часу займає написання коду, некросплатформений
	Б	Кросплатформений	Низька швидкодія
F_2	А	Більша гнучкість у використанні	Необхідно більше часу для написання коду
	Б	Займає менше часу при написанні коду	Менша гнучкість у використанні

F ₃	А	Простота створення	Відсутність кросплатформеності
	Б	Кросплатформений	Неефективний для великих програм

Для F1 використовується параметр X1, для F2 використовуємо параметри X2, X3, для F3 використовуємо параметри X4, X5. На основі даних, що представлені у літературі, визначаємо мінімальні, середні отримуванні та максимально допустимі значення(Таблиця 4.2)

Таблиця 4.2 Система параметрів додатку

Найменування параметру	Позначення параметру	Значення параметру		
		Мінімальне	Середнє	Максимальне
Час розробки, людина*год	X1	48	64	100
Час роботи алгоритму, мс	X2	200	300	600
Рекомендована частота процесору, ГГц	X3	1,9	2,05	2,2
Час обробки результату, мс	X4	30	90	120
Рекомендована швидкість запису на диск, МБ/с	X5	15	32	64

За даними **Ошибка! Источник ссылки не найден.** будуються графічні характеристики параметрів — (рисунок 0.2 — **Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

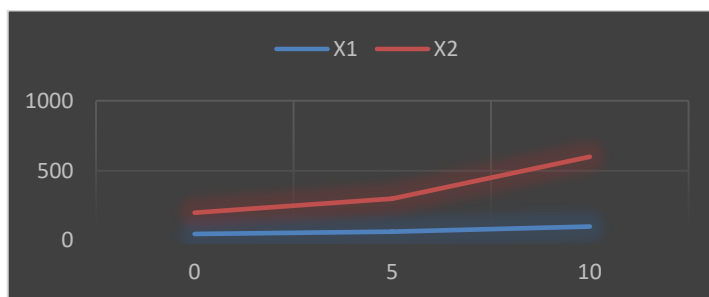


Рисунок 0.2 — X1, час розробки, X2, час роботи алгоритму

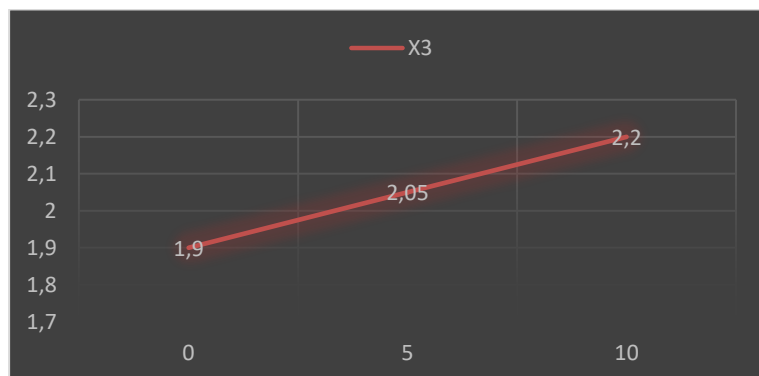


Рисунок 0.3 — X3, рекомендована частота процесору

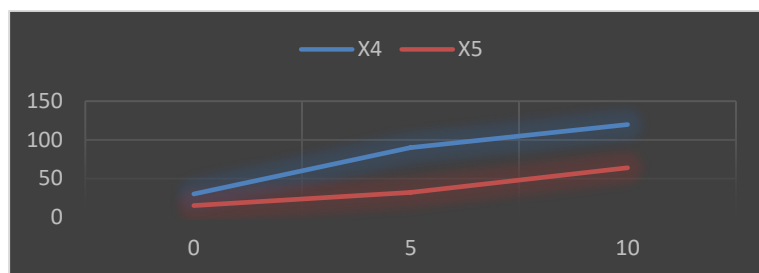


Рисунок 0.4 — X4, час обробки результату, X5, рекомендована швидкість запису на диск

Вагомість параметрів оцінюється за допомогою методів попарного зрівняння. Ранги варіюються від 1 до 5. Результати наведені в табл. 4.3-4.4

Таблиця 4.3 Результат оцінки параметрів

Параметр	Ранг параметру по оцінці експерта							Сума рангів, R_i	Відхилення Δ_i	Квадрат відхилення, $(\Delta_i)^2$
	1	2	3	4	5	6	7			
X1	3	3	4	3	2	5	3	23	2	4
X2	4	5	3	5	4	3	5	29	8	64

X3	2	2	1	2	3	1	2	13	-8	64
X4	5	4	5	4	5	4	4	31	10	100
X5	1	1	2	1	1	2	1	9	-12	144
Разом	15	15	15	15	15	15	15	105	0	376

Таблиця 0.2 — Попарне порівняння параметрів (Найменше значення рангу – 1, найбільше – 5)

Параметр и	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 та X2	<	<	>	<	<	>	<	<	0.5
X1 та X3	>	>	>	>	<	>	>	>	1.5
X1 та X4	<	<	<	<	<	>	<	<	0.5
X1 та X5	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X2 та X3	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X2 та X4	<	>	<	>	<	<	>	>	1.5
X2 та X5	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X3 та X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0.5
X3 та X5	>	>	<	>	>	<	>	>	1.5
X4 та X5	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5

Визначемо коефіцієнт конкордації:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 * 376}{7^2(5^3 - 5)} = 0.77 > W_k = 0.67$$

Так як коефіцієнт конкордації більше нормативного, результати вважають достовірними.

Таблиця 4.5 Розрахунок вагомості параметрів

Параметри	Параметри x_j					Перший крок		Другий крок		Третій крок	
	X1	X2	X3	X4	X5	b_i	K_{bi}	b_i	K_{bi}	b_i	K_{bi}
X1	1	0,5	1,5	0,5	1,5	5	0,2	22	0,19	100	0,19
X2	1,5	1	1,5	1,5	1,5	7	0,28	34	0,30	155,50	0,30
X3	0,5	0,5	1	0,5	1,5	4	0,16	17,5	0,15	80,25	0,15
X4	1,5	0,5	1,5	1	1,5	6	0,24	27,5	0,24	124,75	0,24
X5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	3	0,12	14	0,12	64,50	0,12
Загалом:						25	1	115	1	525	1,00

Враховуючи дані з порівнянь варіантів реалізацій функцій можна виключити з реалізацій функцій наступні варіанти: F1(a)

Залишаються наступні варіанти:

1. $F1(b) \Rightarrow F2(a) \Rightarrow F3(a)$
2. $F1(b) \Rightarrow F2(a) \Rightarrow F3(b)$
3. $F1(b) \Rightarrow F2(b) \Rightarrow F3(a)$
4. $F1(b) \Rightarrow F2(b) \Rightarrow F3(b)$

Таблиця 4.6 - Обчислення коефіцієнтів рівня якості

Основна функція	Варіант Реалізації	Парам.	Абсолютне значення параметру	Бальна оцінка параметру	Коефіцієнт вагомості параметру	Коефіцієнт якості
F1	б)	X1	60	3,58	0,19	0,6802

F2	a	X2	250	2,52	0,30	0,756
		X3	2,13	7,5	0,15	1,125
	б	X2	1,95	2,95	0,30	0,885
		X3	280	4,0	0,15	0,6
F3	a)	X4	300	5,00	0,24	1,2
		X5	40	6,5	0,12	0,78
	б)	X4	50	2,00	0,24	0,48
		X5	25	4,8	0,12	0,576

Обрахуємо коефіцієнти якості кожного з варіантів розробки:

$$K_{я1} = 0,6802 + 0,756 + 1,125 + 1,2 + 0,78 = 4,54$$

$$K_{я2} = 0,6802 + 0,756 + 1,125 + 0,48 + 0,576 = 3,62$$

$$K_{я3} = 0,6802 + 0,885 + 0,6 + 1,2 + 0,78 = 4,15$$

$$K_{я4} = 0,6802 + 0,885 + 0,6 + 0,48 + 0,576 = 3,22$$

Оскільки варіант 1 має найбільший коефіцієнт якості, він є найкращим.

4.3 Економічний аналіз варіантів розробки

Для оцінки трудомісткості розробки спочатку проведемо розрахунок трудомісткості. Усі варіанти мають наступні основні завдання:

- 1) Розробка проекту програмного продукту;
- 2) Вивід результатів на екран

Також кожний з варіантів має два додаткових завдання, які є реалізаціями розгалужених варіантів розробки незалежного модуля. Далі наведено варіанти додаткових завдань (два завдання, які мають номери 3 в реалізаціях та два завдання, які мають номери 4 в реалізаціях)

- 3.1) Ведення даних з файлу
- 3.2) Ведення даних з вручну
- 4.1) Реалізація методів аналізу
- 4.2) Обробка готових методів з бібліотек

В варіанті 1 присутні наступні додаткові завдання під номерами 3.2 та 4.1

В варіанті 2 присутні наступні додаткові завдання під номерами 3.1 та 4.1

В варіанті 3 присутні наступні додаткові завдання під номерами 3.2 та 4.2

В варіанті 4 присутні наступні додаткові завдання під номерами 3.1 та 4.2

За ступенем новизни до групи Б відноситься завдання 4.1, до групи В відноситься завдання 1, 4.2 до групи Г відносяться завдання 2, 3.1, 3.2

За складністю алгоритмів до групи 1 відносяться завдання 1, 4.2 до групи 2 відноситься завдання 2, 3.1, 4.1 до групи 3 відноситься завдання 3.2

Спираючись на норми розрахункового часу визначимо трудомісткість. Вона складає для першого завдання $T_p = 43$ людино-днів. Поправочний коефіцієнт складає $K_n = 1,35$ (нормативно-довідкова інформація). Оскільки під час виконання даного завдання використовуються новостворенні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{ст} = 0,6$. Коефіцієнти K_m і $K_{ст.п}$, які враховують відповідно програмування на мові низького рівня та розробку стандартного програмного забезпечення, для всіх семи завдань дорівнюють 1.

Повна трудомісткість завдання 1, 4.2 (складність – 1, новизна – В):

$$T_1 = 43 * 1,35 * 0,6 = 34,83$$

Аналогічно для завдання 2, 3.1 (складність – 2, новизна – Г)

$$T_p = 12; K_n = 0,43; K_{ст} = 0,7; T_6 = 12 * 0,43 * 0,8 = 3,61$$

Аналогічно для завдання 3.2(складність – 3, новизна – Г)

$$T_p = 8; K_n = 0,36; K_{ст} = 0,6; T_4 = 8 * 0,36 * 0,6 = 1,73$$

Аналогічно для завдання 4.1(складність – 2, новизна – Б):

$$T_p = 27; K_n = 1,08; K_{ст} = 0,8; T_5 = 27 * 1,08 * 0,8 = 23,33$$

Визначимо повну трудомісткість варіантів(людино-днів):

$$T_1 = 34,83 + 3,61 + 3,61 + 23,33 = 65,38$$

$$T_2 = 34,83 + 3,61 + 3,61 + 34,83 = 76,88$$

$$T_3 = 34,83 + 3,61 + 1,73 + 23,33 = 63,5$$

$$T_4 = 34,83 + 3,61 + 1,73 + 34,83 = 75$$

Найбільш трудомісткими завданнями є 1 та 4.2, найбільш трудомісткий варіант – 2.

Далі вважається, що робочий день складає 8 годин, в тиждні п'ять робочих днів. В розробці бере участь один програміст з окладом 15500 грн та тестувальник з окладом 11000 грн. Визначимо середню заробітну плату за годину:

$$C_q = \frac{15500 + 11000}{2 * 22 * 8} = 75,28$$

Тоді заробітна плата для кожного з варіантів реалізації(грн):

$$1) \quad C_{3П} = 75,28 * 8 * 65,38 = 39374,45$$

- 2) $C_{3П} = 75,28 * 8 * 76,88 = 46300,21$
- 3) $C_{3П} = 75,28 * 8 * 63,5 = 38242,24$
- 4) $C_{3П} = 75,28 * 8 * 75 = 45168$

Відрахування на соціальне страхування(22%)(грн):

- 1) $C_{ВІД} = 39374,45 * 0,22 = 8662,38$
- 2) $C_{ВІД} = 46300,21 * 0,22 = 10186,05$
- 3) $C_{ВІД} = 38242,24 * 0,22 = 8413,29$
- 4) $C_{ВІД} = 45168 * 0,22 = 9936,96$

Далі розрахуємо витрати на оплату однієї машино-години. Враховуючи, що вона обслуговує одного спеціаліста з окладом 15500 грн та одного з окладом 11000 грн з коефіцієнтом зайнятості 0,8 , то для двох машин отримаємо

$$C_{Г} = 12 * 15500 * 0,8 + 12 * 11000 * 0,8 = 254400 \text{ грн}$$

Враховуючи додаткову заробітну плату

$$C_{3П} = 254400 * (1 + 0,3) = 330720$$

Відрахування на соціальне страхування 22%

$$C_{ВІД} = 330720 * 0,22 = 72758,4$$

Розрахуємо амортизаційні підрахунки (амортизація 25%, вартість ЕОМ 20000 грн)

$$C_{А} = K_{ТМ} * K_{А} * Ц_{ПР} = 1,15 * 0,25 * 20000 = 5750 \text{ грн}$$

Розрахуємо витрати на ремонт та профілактику:

$$C_p = K_{TM} * C_{IP} * K_p = 1,15 * 20000 * 0,05 = 1150 \text{ грн}$$

Розрахуємо ефективний годинний фонд часу ПК за рік

$$T_{EF} = (365 - 142 - 16) * 8 * 0,8 = 1324,8 \text{ год}$$

Розрахуємо витрати на електроенергію

$$C_{EL} = 1324,8 * 0,4 * 0,8 * 1,75 = 741,89 \text{ грн}$$

Накладні витрати рівні:

$$C_H = 20000 * 0,67 = 13400 \text{ грн.}$$

Отже експлуатаційні витрати(грн):

$$C_{EKC} = 330720 + 72758,4 + 5750 + 1150 + 741,89 + 13400 = 424520,29$$

Тоді собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{M-\Gamma} = \frac{424520,29}{1324,8} = 320,44 \text{ грн/год}$$

Враховуючи, що всі роботи ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу:

$$1) C_M = 320,44 * 8 * 65,38 = 167602,92$$

$$2) C_M = 320,44 * 8 * 76,88 = 197083,42$$

$$3) C_M = 320,44 * 8 * 63,5 = 162783,52$$

$$4) C_M = 320,44 * 8 * 75 = 192264$$

Накладні витрати відповідно

$$1) C_H = 167602,92 * 0,67 = 112293,97$$

$$2) C_H = 197083,42 * 0,67 = 132045,89$$

$$3) C_H = 162783,52 * 0,67 = 109064,96$$

$$4) C_H = 192264 * 0,67 = 128816,88$$

Розрахуємо повну вартість розробки за варіантами:

$$1) C_{\text{ПП}} = 39374,45 + 8662,38 + 168188,742 + 112293,97 = 328912.032$$

$$2) C_{\text{ПП}} = 46300,21 + 10186,05 + 197772,26 + 132045,89 = 386765.93$$

$$3) C_{\text{ПП}} = 38242,24 + 8413,29 + 163352,48 + 109064,96 = 319454.17$$

$$4) C_{\text{ПП}} = 45168 + 9936,96 + 192936 + 128816,88 = 377308.08$$

4.4 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня

$$K_{я1} = 0,6802 + 0,756 + 1,125 + 1,2 + 0,78 = 4,54$$

$$K_{я2} = 0,6802 + 0,756 + 1,125 + 0,48 + 0,576 = 3,62$$

$$K_{я3} = 0,6802 + 0,885 + 0,6 + 1,2 + 0,78 = 4,15$$

$$K_{я4} = 0,6802 + 0,885 + 0,6 + 0,48 + 0,576 = 3,22$$

$$K_{\text{ТЕP1}} = \frac{4,54}{328912.032} = 1,38 * 10^{-5}$$

$$K_{\text{ТЕP2}} = \frac{3,62}{386765.93} = 0,94 * 10^{-5}$$

$$K_{\text{ТЕР3}} = \frac{4,15}{319454.17} = 1,3 * 10^{-5}$$

$$K_{\text{ТЕР4}} = \frac{3,22}{377308.08} = 0,85 * 10^{-5}$$

Висновки до розділу 4

Отже враховуючи всі дослідження, що описані вище, можна сказати, що 1 варіант реалізації є найбільш оптимальним зі сторони якісно-економічної оцінки. Його коефіцієнт техніко-економічного рівня складає $1,38 * 10^{-5}$.

Розробка цього варіанту передбачає такі обов'язкові завдання як:

- 1) Розробка проекту програмного продукту;
- 2) Вивід результатів на екран

Серед завдань між якими ставився вибір в даному варіанті реалізовані такі завдання:

3.2) Ведення даних з вручну

4.1) Реалізація методів аналізу

ВИСНОВКИ

В роботі було досліджено сучасний стан дослідження теорії диференціальних ігор та метод розв'язуючих функцій для задачі зближення на основі різних літературних джерел за цією темою. Сформульовані необхідні та достатні умови завершення гри. Розглянуто алгоритм розв'язання задачі, що описує конфліктно-керований процес системою диференціальних рівнянь та побудови керування переслідувача за допомогою метода розв'язуючих функцій.

Для знаходження гарантованого часу затримки втікача та побудови траєкторії руху переслідувача та втікача у грі для випадку площини був створений програмний продукт на мові програмування Python. Для програми вхідними даними є: значення параметрів конфліктно-керованого процесу; початкові координати переслідувача та втікача. Результати мають графічне представлення.

В процесі виконання роботи були виконані усі поставлені задачі. Тобто:

- а) дослідити сучасний стан розробок методів розв'язку диференціальних ігор;
- б) дослідити схему методу розв'язуючих функцій для одиночного переслідування;
- в) знайти достатні умови закінчення гри за гарантований знайдений час для конкретної задачі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Aumann R.J. Lectures on Game Theory. San Francisco: Westview Press, 1989. 120 с.
2. Dixit A., Nalebuff B. Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. N.Y.: Norton, 1991. 394 с.
3. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1984. 96 с.
4. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. Москва: ИПУ, 2005. 138 с.
5. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. Москва: Физматлит, 2007. 584 с.
6. Гришанов Г.М., Павлов О.В. Исследование систем управления. Самара: Самарский гос. аэрокосм. ун-т, 2005. 128 с.
7. Мулеса О. Ю. Математичні методи конфліктології. Конспект лекцій. Ужгород: УжНУ, 2015. 52 с.
8. Айзекс, Р. Дифференциальные игры. Москва: Мир, 1967. 480 с.
9. Альбрехт Э.Г. О сближении квазилинейных объектов в регулярном случае. Дифференциальные уравнения. 1971. Т.7.
10. Батухтин В. Д. Экстремальное прицеливание в нелинейной игре. ДАН СССР, 1972. Т. 207. С. 11-14.
11. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения. Изв. АН СССР: Техническая кібернетика, 1980. С. 29-36.
12. Ледяев Ю.С., Мищенко Е.Ф. Об оптимальных стратегиях в дифференциальных играх фиксированной продолжительности. ДАН СССР. 1986. Т. 286. С. 284-287.

13. Левченков А.Ю. Об одной задаче сближения двух различных преследователей с одним убегающим. Прикладная математика и механика. 1998. Т. 52. Вып. 1.
14. Чикрий А.А. Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками. ДАН СССР. 1979. Т.246. С. 1306-1309.
15. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Решение линейной дифференциальной игры преследования на основе альтернированного интегрирования без дискриминации управления убегания. ДАН СССР. 1984. Т. 278. С. 1330-1334.
16. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука. 1969.
17. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр. ДАН СССР. 1969. Т. 184. С.285-287.
18. Колмогоров А. М., Фомин А.М. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
19. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479с.
20. Чикрий, А. А. Конфликтно управляемые процессы .К.: Наук. думка, 1992. 384 с
21. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДО ДОПОВІДІ

Дипломна робота на тему: "Метод розв'язуючих функцій в задачі зближення"

Студент: Довжаниця К. Г. КА-64
Керівник: Барановська Л. В.

Актуальність роботи

На сьогоднішній день теорія ігор стала революційним міждисциплінарним явищем, що поєднує в собі психологію, математику, філософію та широкий спектр інших наукових областей. Ця наука на стільки розгалужена, що охоплює майже всі аспекти сучасного життя. Від оптимальних стратегій маркетингової кампанії до ведення військових рішень, ідеальної тактики аукціону та стилів голосування теорія ігор забезпечує гіпотетичну основу з матеріальними наслідками. Оскільки в цих рішеннях беруть участь численні сторони, теорія ігор є основою для раціонального прийняття рішень.

Поняття теорії ігор

«Теорія ігор – це наука про стратегічне мислення» .

«Теорія ігор – це теорія математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту»

«Теорія ігор – це розділ прикладної математики, який досліджує моделі прийняття рішень в умовах неспівпадіння інтересів сторін (гравців)»

Класифікація ігор

За кількість гравців:

- ігри двох гравців та багатьох гравців

В залежності від обмежень на суму виграшу:

- ігри із нульовою сумою та ігри із довільною сумою

За рівнем інформованості гравців:

- ігри із повною інформованістю гравців та ігри із неповною інформованістю гравців

За можливістю повторів:

- ігри одноразові та динамічні ігри (динамічні ігри динаміка яких описується диференціальними або різницевиими рівняннями, називаються **диференціальними іграми**)

З точки зору можливості спільних дій

- некооперативні та кооперативні ігри

Враховуючи зовнішній контекст:

- унікальні та популяційні.

Поняття диференціальних ігор переслідування

Становлення теорії диференціальних ігор відносять до 60-х років XX сторіччя.

Красовським М.М. та представниками його наукової школи була створена теорія позиційних ігор, в основі яких лежить поняття стабільного мосту та правило екстремального прицілювання. Для широкого класу диференційних ігор була доведена теорема про альтернативу . Розв'язок ігрової задачі зводиться до послідовного вибору екстремальних керувань, що зберігають траєкторію ККП на стабільному мосту та приводяться траєкторію по ньому на термінальну множину.

- Основні результати щодо розв'язку диференційних ігор переслідування та ухилення отримали Л.С. Понтрягін та Є.Ф. Міщенко. Вони сформулювали достатні умови розв'язності задачі переслідування в нелінійних диференційних іграх. В ній використовується формалізм принципу максимуму – одного з центральних методів теорії керування. Головний результат полягає в описі початкових позицій, з яких гарантовано є можливість завершення переслідування, а також в обчисленні часу переслідування, та спосіб формування керування переслідувача, що реалізує процес переслідування.
- Спрощення цих результатів привели до створення Л.С. Понтрягіним першого та другого методів розв'язку задачі переслідування для лінійних диференційних ігор. Найбільш простим та досить ефективним для розв'язку конкретних задач переслідування є перший метод Л.С.Понтрягіна. В рамках цього методу достатні умови розв'язності задачі переслідування в класі контрстратегій можна зручно перевірити. Перший метод Л.С.Понтрягіна тісно пов'язаний з методом розв'язуючих функцій, який і розглядається в даній роботі.

6

Постановка задачі

Рух керуючого об'єкта в просторі описується рівнянням

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v),$$

де z — фазовий вектор, що складається з геометричних координат, швидкостей, прискорень переслідувача і втікача; A — квадратна матриця порядку n , $\varphi(u, v): U \times V \rightarrow R^n$ — неперервна за сукупністю змінних функція – блок управління; U та V — параметри управління -переслідувача та втікача, які вибираються з областей управління U та V , що являються непустими ком пактами простору R^n .

Вибираючи свої управління у вигляді деяких функцій, кожний з гравців впливає на процес, задля своїх цілей. Ціль переслідувача — вивести траєкторію процесу на деяку замкнуту множину M , яку ми назвемо термінальною, якомога швидше.

А ціль втікача — відвернути траєкторію процесу від зустрічі з множиною M на всьому напівнескінченному інтервалі часу, якщо це неможливо, то максимально відтягнути момент зустрічі.

Найчастіше в задачах переслідування-втікання термінальна множина M є циліндром в множині R^n .

$$M^\circ = M^\circ + \varepsilon S$$

де M° — лінійний підпростір простора R^n , S — куля з ортогонального доповнення M° до в просторі R^n , $\varepsilon \geq 0$.

Основна схема метода

Для конфліктно-керуючого процесу, розглядається локальна задача зближення з фіксованим часом. Позначимо через π — оператор ортогонального проектування з R^n на L , через e^{tA} — фундаментальну матрицю однорідної системи $\dot{z} = Az$, а $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$ для $v \in V$.

Розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v),$$

$$W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), t \geq 0.$$

Умова 2.2.1 (умова Л.С. Пантрягіна). Відображення $W(t) \neq \emptyset$ для всіх $t \geq 0$.

Замітка 2.2.1. Для лінійного процесу (2.1.3)

$$W(t) = \pi e^{At} U^* - \pi e^{At} V$$

Позначимо через $\Gamma = \{\gamma(\cdot): \gamma(t) \in W(t), t \geq 0\}$ сукупність борелівських селекторів багатозначного відображення $W(t)$. Зафіксуємо деякий елемент $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, покладемо

$$\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = \pi e^{At} z + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

і розглянемо розв'язуючу функцію

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) =$$

$$\sup \{ \alpha \geq 0: [W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \}$$

для $0 \leq \tau \leq t, z \in R^n, v \in V$.

Теорема 2.2.1. [Чикрій] Нехай для конфліктно керованого процесу, виконується умова 2.2.1, множина M — випукла, для початкового стану z^0 і деякого селектора $\gamma^0(\cdot) \in \Gamma$. $T(z^0, \gamma^0(\cdot)) < +\infty$. Тоді траєкторія процесу (2.2.1) може бути приведена з початкового стану z^0 на термінальну множину в момент $T(z^0, \gamma^0(\cdot))$.

Алгоритм розв'язку

Якщо $\varphi(u, v) = u - v$, то процес
 $\dot{z} = Az + u - v$ (2.1.3)
 є лінійним.

1. Визначаємо термінальну множину
2. Знаходимо оператор ортогонального перетворення Π
3. Знаходимо фундаментальну матрицю системи
4. Знаходимо
5. Знаходимо ξ $W(t)$
6. Знаходимо розв'язуючу функцію
7. Знаходимо час затримки втікача як
8. Будуємо управління переслідувача

$$\min \{t \geq 0: \int_0^t \min_{|v| \leq 1} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) d\tau\}$$

Х переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$.

Реалізація алгоритму:

Для даної роботи було використано мову програмування Python.

Програма реалізована для конфлікто-керованого процесу:

Рух переслідувача і втікача задається рівняннями

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, & x \in R^s, \quad s \geq 2, \quad \|u\| \leq 1, \quad \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma v, & y \in R^s, \quad \|v\| \leq 1, \quad \beta, \sigma > 0. \end{cases}$$

Реалізація алгоритму:

Для даної роботи було використано мову програмування Python.

Переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$.

Програма реалізована для конфлікто-керованого процесу:

Рух переслідувача і втікача задається рівняннями

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, & x \in R^s, \quad s \geq 2, \quad \|u\| \leq 1, \quad \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma v, & y \in R^s, \quad \|v\| \leq 1, \quad \beta, \sigma > 0. \end{cases}$$

Аналітично був роз'язаний приклад

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = 2u, & x \in R^2, \quad \|u\| \leq 1, \quad \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{y} = v, & y \in R^2, \quad \|v\| \leq 1, \quad \beta, \sigma > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 6, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 2, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

і на його результаті була перевірена робота програмного продукту

Фундаментальна матриця однорідної системи буде мати вигляд:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-t}}{2} & -\frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\xi(t, z, 0) = 4 + \frac{1-e^{-t}}{1} 1 - \frac{1-e^{-2t}}{2} 1.$$

Розв'язуюча функція буде великим додатнім коренем квадратного рівняння

$$\left| \frac{1-e^{-2(t-\tau)}}{2} v - \alpha \xi(t, z(0), 0) \right| = \frac{1-e^{-(t-\tau)}}{1} 2$$

Далі знайдемо Час затримання вітка $T(z(0), 0)$ визначимо як

$$\min \{t \geq 0: \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau\}$$

$$\int_0^t \frac{w(t-\tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau = 1$$

Розв'язавши дане інтегральне рівняння відносно t отримуємо

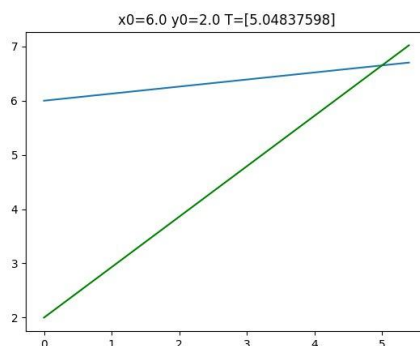
$$t = 5$$

На вході в програму користувач задає значення параметрів та початкові умови для x та y :

Переслідування вважається завершеним коли $x=y$

```
===== KEY
Input alpha 1
Input beta 2
Input ro 2
Input sigma 1
Input x(0) 6
Input x'(0) 1
Input y(0) 2
Input y'(0) 1
```

На виході з програми отримуємо:
час затримки втікача T , та їхні
графіки руху.



ВИСНОВКИ

В роботі було досліджено сучасний стан дослідження теорії диференціальних ігор та метод розв'язуючих функцій для задачі зближення на основі різних літературних джерел за цією темою. Сформульовані необхідні та достатні умови завершення гри. Розглянуто алгоритм розв'язання задачі, що описує конфліктно-керований процес системою диференціальних рівнянь та побудови керування переслідувача за допомогою метода розв'язуючих функцій.

Для знаходження гарантованого часу затримки втікача та побудови траєкторії руху переслідувача та втікача у грі для випадку площини був створений програмний продукт на мові програмування Python. Для програми вхідними даними є: значення параметрів конфліктно-керованого процесу; початкові координати переслідувача та втікача. Результати мають графічне представлення.

ДОДАТОК Б ТЕКСТ ПРОГРАМИ

```

import scipy.integrate as integr
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import cos,sin,exp
from scipy.linalg import expm
alpha=float(input('Input alpha '))
#alpha=1
beta=float(input('Input beta '))
#beta=2
ro=float(input('Input ro '))
#ro=2
sigma=float(input('Input sigma '))
#sigma=1
if(ro>=sigma)and(ro/alpha>=sigma/beta):
x0=float(input('Input x(0) '))
x1=float(input('Input x`(0) '))
y0=float(input('Input y(0) '))
y1=float(input('Input y`(0) '))
z0=np.array([x0-y0,x1,y1])
u=np.array([[0],[ro],[0]])
v=np.array([[0],[0],[sigma]])
pi= np.array([[1.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0]])
c = np.array([[0.0, 1.0, -1.0],[0.0, -(alpha), 0.0],[0.0, 0.0, -(beta)]])
expA=expm(c)
#print('exp^At ', expA)
d=np.dot(pi,expA)
#print(d)
W=np.array(np.dot(d,u)+np.dot(d,v))
#print(W)
w=W[0]
#print(w)

```

```

ksi=np.dot(d,z0)
#print(ksi)
norm_ksi=abs(ksi[0]+ksi[1]+ksi[2])
#print(norm_ksi)
min_solve_f=w/norm_ksi
T=1/min_solve_f
print('Time')
print(T)
a = 4
v = lambda t: sigma*0.93
u0 = [x0, y0]
#v(t)-(u0[0]-u0[1])*((u0[0]*v(t)-u0[1]*v(t)+(((u0[0]*v(t)-u0[1]*v(t))**2)+((u0[0]-
u0[1])**2)*((a**2)-abs(v(t))))**1/2)/(u0[0]-u0[1])**2
# x' = f(t,x)
def f(t,x):
return (v(t)-(u0[0]-u0[1])*((u0[0]*v(t)-u0[1]*v(t)+(((u0[0]*v(t)-u0[1]*v(t))**2)+((u0[0]-
u0[1])**2)*((a**2)-abs(v(t))))**1/2)/(u0[0]-u0[1])**2
, v(t))
# y' = f(t,y)
#time per
a,b = 0,6
#starting conditions
#tolerance
Dif_x = integr.solve_ivp(t_span=(a,b),y0=u0,fun=f,dense_output=True)
Dif_x = Dif_x.sol
if __name__=='__main__':
X = np.arange(a,b,(b-a)/10)
Y = [Dif_x.__call__(i)[0] for i in X]
#plot for our algorithm
Z = [Dif_x.__call__(i)[1] for i in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X, Z,color='green')
plt.title('x0='+str(u0[0])+' y0='+str(u0[1])+' T='+str(T))
plt.show()

```

else:

```
print('You should input parametrs that ro>=sigma and **ro/alpha>=sigma/beta**')
```